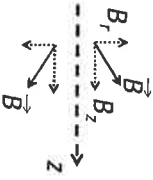
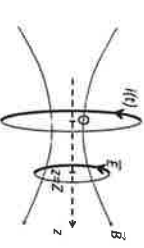


Julia

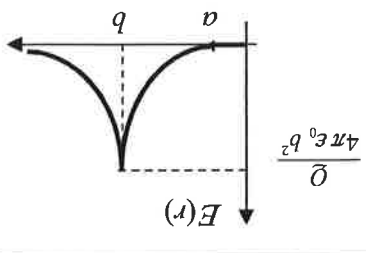
Exercice 1	
A.1	<p>Tous les plans passant par Oz sont des plans d'antisymétrie de la distribution des courants, \vec{B} appartient à ces plans. Donc, \vec{B} n'a pas de composante suivant u_θ s'écrit : $\vec{B}(r, z, \theta) = B_r(r, z, \theta)\vec{u}_r + B_z(r, z, \theta)\vec{u}_z$</p> <ul style="list-style-type: none"> Invariance par rotation autour de $u_z \rightarrow \vec{B}$ ne dépend pas de θ Alors : $\vec{B} = B_r(r, z)\vec{u}_r + B_z(r, z)\vec{u}_z$ (champ à symétrie de révolution) Sur l'axe Oz, \vec{B} appartient à cet axe, c.à.d. $B_r(r=0, z) = 0$ et $\vec{B} = B_z(r=0, z)\vec{u}_z$ Bonus : le plan de la spire est un plan de symétrie de la distribution des courants : B est antisymétrique par rapport au plan de la spire <p style="text-align: center;">  </p>
A.2	<p>Pénaliser toute erreur ou imprécision sur cette question</p> <p>Le calcul peut être mené par intégration de contributions élémentaires $d\vec{B}$ (données par la loi de Biot-Savart)</p> <p>Chaque contribution est associée à un élément $d\vec{\ell}$ situé sur la spire (orienté dans le sens de I)</p> <p>Schéma avec spire, $d\vec{\ell}$, $d\vec{B}$</p> <p>En prenant en compte le fait que \vec{B} est dirigé selon l'axe, on somme uniquement les projections dB_z sur Oz.</p> <p>B_z décroît avec z : assez intuitif (les lignes de champ rebouclent).</p> <p>On a $\text{div}(\vec{B}) = 0$ (toujours vrai) c.à.d. $\oint_{\text{cylindre}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$</p> <p>Normales bien orientées (schéma ou texte)</p> <p>En développant sur les faces entrée-sortie-latérale :</p> $\pi r^2 [-B_z(z) + B_z(z + dz)] + 2\pi r dz B_r(r, z) = 0$ $\pi r^2 [-B_z(z) + B_z(z) + \frac{\partial B_z(z)}{\partial z} dz] + 2\pi r dz B_r(r, z) = 0$ <p>d'où $B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z(z)}{\partial z}$</p>
A.3	<p>La circulation de \vec{B} sur le contour est nulle car il n'enlace pas de courant et donc $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$ que l'on va développer sur les différents segments du rectangle :</p> <p style="text-align: center;"><i>MNOP</i></p> <p>Bonus $\int_{MN} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{r_1}^{r_2} B_r(r, z) dr = \int_0^r -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z(z)}{\partial z} dr = -\frac{r^2}{4} \frac{\partial B_z(z)}{\partial z}$</p> <p>De même, on obtient :</p>
A.4	<p>Bonus $\int_{NO} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{z_1}^{z_2} B_z(z) dz = \int_0^z B_z(z) dz$</p> <p>De même, on obtient :</p>

u.s

B.1	<p>Equation de Maxwell-Ampère : $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (car $\vec{j} = 0$)</p> <p>Avec $\vec{B} = B_r(r, z)\vec{u}_r + B_z(r, z)\vec{u}_z$, nous avons : $\text{rot}(\vec{B}) = \left(\frac{\partial B_r(r, z)}{\partial z} - \frac{\partial B_z(r, z)}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta$</p> <p>Donc : $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t} \vec{u}_\theta$ et finalement $\vec{E} = E(r, z, t) \vec{u}_\theta$</p> <p>Les lignes de champ \vec{E} s'enroulent autour des lignes de champ \vec{B}</p> <p style="text-align: center;"></p>	0.25
B.2	<p>Sur un cercle centré sur Oz de rayon ρ :</p> $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{(S)} \text{rot}(\vec{E}) \cdot d\vec{S} = -\iint_{(S)} \frac{\partial B}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ <p>$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \oint E_\theta \cdot d\ell = \int_0^{2\pi} E_\theta(\rho, z) \rho d\theta = 2\pi \rho E_\theta(\rho, z)$</p> <p>et $-\iint_{(S)} \frac{\partial B}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\iint_{(S)} \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS \vec{u}_z = -\int_0^{2\pi} \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS = -2\pi \rho^2 \frac{\partial B}{\partial t}$</p> <p>avec $\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu_0 I_m \omega \sin(\omega t)}{2\pi R} \left(1 + \frac{Z^2}{R^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right)$</p> <p>Soit $E(r = \rho, z = Z) = \frac{\mu_0 I_m \omega \sin(\omega t)}{4\pi R} \left(1 + \frac{Z^2}{R^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$</p> <p>Bonus : Un courant apparaît dans la spire ($\vec{j} = \gamma \vec{E}$) Cette spire parcourue par un courant dans un champ \vec{B} subit une force de Laplace (voir sujet anneau de Thomson ...)</p>	0.5
B.5	<p>On reprend $B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z(z)}{\partial z}$ avec $\frac{\partial B_z(z)}{\partial z} = -\frac{3}{2} B_0 \frac{z}{R^2} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right)^{-\frac{3}{2}}$</p> <p>Soit $B_r(r, z) = \frac{3}{2} B_0 \frac{zr}{R^2} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right)^{-\frac{3}{2}}$</p> <p>Soit au final : $B_z(r, z) = B_z(z) = \frac{r^2}{4} \frac{\partial^2 B_z(z)}{\partial z^2}$</p> <p>(non noté)</p>	0.25
Total : 11 + bonus 2.5		

1.25

Exercice 2

1)	<p>Pour une couche comprise entre les sphères r et $r+dr$ (entre a et b), la charge dq est :</p> $dq = \rho \cdot dt \text{ avec } dt = 4\pi r^2 dr \text{ ou } dt = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr$ $\bar{Q} = \int_b^a dq = 4\pi k \int_b^a r^3 dr \Rightarrow \bar{Q} = \pi k (b^4 - a^4)$ <p>D'où : $k = \frac{\pi (b^4 - a^4)}{\bar{Q}}$</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,25</p>
2)	<p>Symétries : VM, E une infinité de plans de symétrie de la distribution de charges contenant O et M : ces plans ayant une direction commune qui est (OM). Or \vec{E} appartient à tout plan de symétrie de la distribution de charges, $\vec{E}(M)$ est donc radial</p> <p>Invariances : invariances de la distribution de charges / toute rotation d'angle θ ou ϕ</p> $\Rightarrow \vec{E}(M) = E(r) \cdot \vec{u}_r$	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,25</p>
3)	<p>Enoncé du théorème de Gauss avec une sphère centrée sur O de rayon r</p> $r > b : 4\pi r^2 \cdot E^+ = \frac{\bar{Q}}{\epsilon_0} \Rightarrow E^+ = \frac{4\pi \epsilon_0}{1} \cdot \frac{r^2 \cdot u_r}{4\pi r^2} \cdot u_r$ $a < r < b : 4\pi r^2 \cdot E' = \frac{\epsilon_0}{1} \int_0^a 4\pi r'^2 k l \cdot dt = \frac{\epsilon_0}{4\pi k} \int_0^a r'^3 \cdot dt = \frac{\epsilon_0}{\pi k} (r^4 - a^4)$ <p>En remplaçant k par son expression : $E' = \frac{4\pi \epsilon_0 (b^4 - a^4)}{\bar{Q}} \cdot (r^2 - \frac{r^4}{a^2}) \cdot u_r$</p> $0 < r < a : 4\pi r^2 \cdot E^- = 0 \Rightarrow E^- = 0$ <p>En O, E devrait appartenir à chacun des plans de symétrie contenant O : impossible $\Rightarrow E^- = 0$</p> <p>Bonus : pas de discontinuité de E pour $r=a$ et $r=b$ car pas de densité surfacique de charge</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>Bonus : 0,25</p>
4)	<p>Les invariances de la répartition de charges $\Rightarrow V$ ne dépend que de r</p> $\vec{E} = -\text{grad}(V) \quad (\text{ou } E = -\frac{\partial V}{\partial r})$ <p>La méthode consiste à intégrer chaque fonction dans chaque région.</p> <p>On commence par la région $r > b$ et on fixe la constante avec la condition d'avoir potentiel absolu ($V=0$ quand $r \rightarrow \infty$).</p> <p>il est possible de poser $V=0$ quand $r \rightarrow \infty$ car la distribution de charge est localisée.</p> <p>Ensuite on fixe la constante dans chaque domaine ($a \leq r \leq b$ et $r \leq a$) par la condition de continuité du potentiel.</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
5) a)		<p>1^{er} graphique : 1,0</p> <p>2nd graphique : 1</p> <p>(enlever 0,25 par oubli ou erreur)</p>
5) b)	<p>$\sigma = \frac{\bar{Q}}{4\pi b^2}$</p> <p>Il y a discontinuité du champ qui se réduit à sa composante normale.</p> <p>Cette discontinuité vaut $\frac{\epsilon_0}{\sigma}$</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>

Total : 10 + bonus 0,25

6,75